第17講　落とせない積分計算

17

［A］ 次の定積分を計算せよ．ただし，m，n は正の整数である．

（1） $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^5 x\,dx$

（2） $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^4 x\,dx$

（3） $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3 x}\,dx$

（4） $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx$

［B］ 次の定積分を計算せよ．

$$\int_0^1 \frac{1}{x^6+1}\,dx$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 17 講　落とせない積分計算

17　次の定積分を計算せよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta + 1} d\theta$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 17 講　落とせない積分計算

17

［A］ 次の定積分を計算せよ．ただし，m，n は正の整数である．

（1） $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^5 x\,dx$

（2） $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^4 x\,dx$

（3） $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^3 x}dx$

（4） $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx$

［B］ 次の定積分を計算せよ．

$$\int_0^1\frac{1}{x^6+1}dx$$

【答】 ［A］（1）$\dfrac{1}{24}$　（2）$\dfrac{\pi}{32}$　（3）$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\log 3$　（4）$\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$

［B］ $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\log(2+\sqrt{3})$

【解説】

［A］（1）

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^5 x\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^7 x-\cos^5 x)(-\sin x)dx\\&=\left[\frac{1}{8}\cos^8 x-\frac{1}{6}\cos^6 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{24}}\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^4 x\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{16}(1-\cos 4x+2\sin^2 2x\cos 2x)dx\\&=\frac{1}{16}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin^3 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\boldsymbol{\frac{\pi}{32}}\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$\sin x=t$ と置換積分することにより

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^3 x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(1-t^2)^2}dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{2t}{1-t^2}+\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\log 3}$$

(4)　$m=n$ のとき

$$\sin mx\sin nx=\sin^2 mx$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos 2mx)$$

よって

$$\int_0^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4m}\sin 2mx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

$m\neq n$ のとき

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\{-\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}$$

より

$$\int_0^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x+\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_0^{\pi}$$

$$=0$$

以上より　$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}} & \boldsymbol{(m=n)}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{(m\neq n)}\end{cases}$

［B］

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{x^2-2}{x^4-x^2+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x-1}{x^2-\sqrt{3}x+1}-\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}x-1}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1}-\frac{\sqrt{3}}{12}\frac{2x-\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{12}\frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{12}\frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{12}\frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

であり，$x=\tan\theta$, $x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\tan\theta$, $x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\tan\theta$ と置換積分することで順に

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{12}}2d\theta=\Big[2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{12}}=\frac{5}{6}\pi,$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{12}\pi}2d\theta=\Big[2\theta\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{12}\pi}=\frac{\pi}{6}$$

となり，また

$$\int_0^1\left(-\frac{\sqrt{3}}{12}\frac{2x-\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}\,x+1}+\frac{\sqrt{3}}{12}\frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}\,x+1}\right)dx=\left[-\frac{\sqrt{3}}{12}\log\frac{x^2-\sqrt{3}\,x+1}{x^2+\sqrt{3}\,x+1}\right]_0^1$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\log(2+\sqrt{3}\,)$$

となるので，$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^6+1}dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}\log(2+\sqrt{3}\,)}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 17 講　落とせない積分計算

17　次の定積分を計算せよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta+1}d\theta$$

【答】 $\frac{1}{3}\log 2+\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

【解説】

$\sin\theta=x$ と置換積分すると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta+1}d\theta=\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}dx$$

$$=\int_0^1 \left(\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\log|x+1|-\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)\right]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

となるが，$x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t$ と置換積分することにより

$$\int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sqrt{3}}{3}dt=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

となるので，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta+1}d\theta=\left[\frac{1}{3}\log|x+1|-\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)\right]_0^1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi=\boldsymbol{\frac{1}{3}\log 2+\frac{\sqrt{3}}{9}\pi}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。